A • GUIMIER

Fondements mathématiques de la relativité restreinte

(*Nouvelle présentation*)

On propose une nouvelle présentation de https ://amu • hal • science / hal − 02965773.
Notamment on compare 2 méthodes de démonstrations pour l'explicitation d'une matrice de Lorentz sous sa forme polaire .
Dans les 2 cas on montre l'unicité de la décomposition.

02/2024

Chapitre I : Quel problème veut-on résoudre ?

On considère notre espace physique $\mathcal{E}$ *affine tri-dimensionnel dans lequel se meuvent* **2** *observateurs* **O** et **O'** *• On identifiera par la suite l'observateur et sa position dans* $\mathcal{E}$.
O et **O'** *repèrent des événements qui se produisent dans* $\mathcal{E}$ *à un moment donné* (*par exemple le choc de* **2** *particules*) *grâce à un système de coordonnées cartésiennes dont l'origine est* **O** et **O'** *et qui engendrent* **2** *espaces vectoriel* **E** et **E'** .
A un instant donné l'espace $\mathcal{E}$ *est identique aux espace* **E** et **E'** *engendrés par chacune des* **2** *bases associées à* **O** et **O'.**
Le temps est mesuré par des horloges qui sont supposées être identiques.
On suppose que **O** et **O'** *se croisent à un instant donné où on profite d'initialiser les* **2** *horloges à* **0**.
On veut connaître les **4** *valeurs numériques obtenues par* **O** *qui caractérisent un événement connaissant les valeurs obtenues par* **O'** *grâce à une transformation* $T : (t', x', y', z') \rightarrow (t, x, y, z)$.
Par exemple si l'horloge de **O'** *indique* t', **O** *constatera que le temps indiqué par sa propre horloge* $t = \alpha \cdot t'$ *avec* $\alpha > 1$:
il lui semblera que le temps s'écoule en **O'** *moins vite que pour lui − même , fait expérimental que devra vérifier la transformation* **T**.

On sait déjà que **O'** *, pour son système de coordonnées et son horloge , est caractérisé au temps* $t' = 0$ *par* $x' = 0, y' = 0, z' = 0$ *• De même pour* **O** *, au temps* $t = 0$ *par* $x = 0, y = 0, z = 0$ *pour son système de coordonnées.Sachant que pour* $t = t' = 0$ *,* **O** et **O'** *sont au même endroit , si* **O'** *mesure* $t' = 0 , x' = 0, y' = 0, z' = 0$ *pour lui même que mesure* **O** *?*
Puisque que pour $t = t' = 0$ *,* **O** et **O'** *sont confondus ,*
O' *mesure* $t' = 0 , x' = 0, y' = 0, z' = 0$ *dans son système de coordonnées ,*
O *mesure* $t = 0 , x = 0, y = 0, z = 0$ *dans son système de coordonnées .*
On en conclut que $T(t' = 0 , x' = 0, y' = 0, z' = 0) = (t = 0 , x = 0, y = 0, z = 0)$.

Pour évaluer **T** *on va se placer dans le cas particulier suivant où :*
H1 : *Pour les* **2** *observateurs* **O** et **O'** *, l'espace* $\mathcal{E}$ *est galiléen et on les mêmes lois de la physique.*
H2 *: les* **2** *observateurs sont munis :*
(***a***) *du même système métrique , de la même règle et de la même horloge .*
Le temps est parfaitement défini : unicité du temps galiléen .
(*cf P •Brousse •Mécanique Armand Colin 1968 • ou*
https :// archive • org/ details/ matricesdelorentz/ page/ n5 / mode/ 2 up?view=theater p.6)
On initialise à **0** *les* **2** *horloges lors du croisement .*
(***b***) *d'un système de coordonnées cartésiennes orthonormales de bases* $B = B\left(\overrightarrow{O_E}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *et* $B' = B'\left(\overrightarrow{O'_{E'}}, \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$, **E** et **E'** *les* **2** *espaces vectoriels attachés à* **O** et **O'** *,* $\overrightarrow{O_E}$ *positionné en* **O** et $\overrightarrow{O'_{E'}}$ *positionné en* **O'**.
H3 *:* **O** et **O'** *sont en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre dans leur système de coordonnées .*
H4 *: la valeur numérique du module* **c** *de la vitesse de la lumière est le même pour les* **2** *observateurs et est la vitesse maximale possible .*
H5 *: on suppose que chaque observateur puisse mettre sur tout point fixe par rapport à lui-même une horloge synchronisée avec sa propre horloge* · (*problème de la synchronisation des horloges*) .
Si on nomme **t** et **t'** *les variables temporelles , pour un problème d' homogénéisation de dimension*

on considérera plutôt **ct** *et* **ct'** *comme coordonnées temporelles .*
On notera $\vec{\tau}$ *et* $\vec{\tau}'$ *les directions unidimensionnelles temporelles .*

Conséquence *: chaque observateur , par la donnée de* **4** *valeurs numériques , pourra repérer une position spatio - temporelle et ainsi définir ainsi un espace vectoriel* $\mathfrak{E}$ *réel de dimension* **4** *pour l'observateur* **O**, *de même* $\mathfrak{E}'$ *pour pour l'observateur* **O'** .

L'espace $\mathfrak{E}$ *peut être défini par :*

$$\mathfrak{E} = \left\{ \lambda_1\left(c\vec{\tau}, \overrightarrow{O_E}\right) + \lambda_2\left(0, \vec{i}\right) + \lambda_3\left(0, \vec{j}\right) + \lambda_4\left(0, \vec{k}\right) \ / \ \left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\right) \in \mathbb{R}^4 \right\} = \mathbb{R}.\vec{\tau} \times E$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \vec{e}_i \ / \ \left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\right) \in \mathbb{R}^4 \right\} \text{ avec } \vec{e}_1 = \left(c\vec{\tau}, \overrightarrow{O_E}\right), \vec{e}_2 = \left(0, \vec{i}\right), \ldots$$

De même pour $\mathfrak{E}'$.
Définition : Par abus d'écriture on appellera $\mathscr{B}\left(\vec{O}_{\mathfrak{E}}, c\tau, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *et* $\mathscr{B}'\left(\overrightarrow{O'}_{\mathfrak{E}'}, c\tau', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\right)$ *les bases de* $\mathfrak{E}$ *et de* $\mathfrak{E}'$.

H6 : *la transformation* **T** *qui permet de passer de* $\mathfrak{E}'$ *à* $\mathfrak{E}$ *doit être*
(***a***) *condition algébrique : bijective ,*
(***b***) *condition géométrique : respecter les lignes droites (droites d'univers),*
(***c***) *condition physique : laisser* **c** *module de la vitesse de la lumière invariante .*

Conséquence de (***a***) *et* (***b***) *et en utilisant le théorème :*
Théorème : *Si une transformation bijective* $\mathcal{T}$ *d'un espace affine* $\mathcal{E}$ *sur* $\mathbb{R}$ *de dimension* **n** *dans un espace affine* $\mathcal{E}'$ *sur* $\mathbb{R}$ *de dimension* **n** *transforme les droites affines de* $\mathcal{E}'$ *en des droites affines de* $\mathcal{E}$ *alors* $\mathcal{T}$ *est affine .*
Comme $T\left(\overrightarrow{O'}_{\mathfrak{E}'}\right) = \vec{O}_{\mathfrak{E}}$ *on en déduit que* **T** *est linéaire*
H6' : (*hypothèse alternative de* ***H6***)
La transformation **T** *qui permet de passer de* $\mathfrak{E}'$ *à* $\mathfrak{E}$ *doit être*
(***a'***) *condition topologique : continue ,*
(***b'***) *condition géométrique : homogénéité de l'espace temps :*
"L'espace et le temps sont invariant par translation ".
Ce qu'on peut traduire si on considère **2** *points* **X'** *et* **Y'** *de* $\mathcal{E}'$ *, leur translaté* $X'+H$ *et* $Y'+H$ *, et leur image :* $T(X')$ *et* $T(Y')$ *,* $T(X'+H)$ *et* $T(Y'+H)$ *dans* $\mathcal{E}'$ *alors :*
$T(X'+H) - T(Y'+H) = T(X') - T(Y')$.
(***c***) *condition physique : laisser* **c** *module de la vitesse de la lumière invariante .*

Conséquence de (***a'***) *et* (***b'***) *et en utilisant le théorème qui suit* **T** *est linéaire .*
Théorème :
Soient **E** *et* **F** **2** *espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$, *f une application de* **E** *dans* **F** .
On a l'équivalence :
$\forall\ (t, a, b) \in E^3 f(a) - f(b) = f(a+t) - f(b+t) \Leftrightarrow f$ *est* $\mathbb{Q}$*-affine .*
Si de plus **f** *est continue et* **E** *de dimension finie on peut remplacer* $\mathbb{Q}$ *− affine par* $\mathbb{R}$ *− affine .*
Démonstration :
De $\forall\ (t, a, b) \in E^3 f(a) - f(b) = f(a+t) - f(b+t)$ *on en déduit :*
$f(a+t) - f(a) = f(b+t) - f(b)$ *et si* $b = 0$ *:*
$f(a+t) - f(a) = f(t) - f(0)$, $\qquad (i)$

posons $g(t) = f(t) - f(0) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + f(0)$,
De (i) $f(a+t) - [f(a) + f(t)] = -f(0)$ et donc :
$[g(a+t) + f(0)] - [[g(a) + f(0)] + [g(t) + f(0)]] = -f(0)$ et donc :
$g(a+t) - [[g(a)] + [g(t)]] = 0.$
Donc g est additive donc $\mathbb{Q}$ − linéaire et f est $\mathbb{Q}$ − affine .
Le reste est classique .
Comme $T\left(\overrightarrow{O'_{\mathcal{E}'}}\right) = \overrightarrow{O_{\mathcal{E}}}$ on en déduit que T est linéaire .

Selon **H6** ou **H6'** T est donc linéaire et représentable par une matrice (de Lorentz)

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix}$$ à déterminer grâce à l'hypothèse (c),

en fonction des seuls paramètres variables : la vitesse relative uniforme $\vec{V}$ de O' par rapport à O et de $\mathcal{B}\left(\overrightarrow{O_{\mathcal{E}}}, c\tau, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et de $\mathcal{B}'\left(\overrightarrow{O'_{\mathcal{E}'}}, c\tau', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$.
On remarque que si $X = MX'$, $X' \neq 0$ et $X = 0$ on aura si P est l'événement associé à X et X' :
P est en O au temps $t = 0$ pour l'observateur O et comme pour $t = t' = 0$ O et O' se croisent
P est en O' pour $t' = 0$ donc $X' = 0$. Contradiction .
On en déduit que M est bijective .

Chapitre II : Résultats préparatoires

(**1**) *On peut déjà préciser la première colonne de* **M**

Pour simplifier on note $\mathcal{B} = \mathcal{B}\left(\overrightarrow{O}_{\mathcal{E}}, c\tau, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ *et* $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'\left(\overrightarrow{O'}_{\mathcal{E}'}, c\tau', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$

les bases associées à **O** *et* **O'** .

Puisque **O'** *à la vitesse* $\overrightarrow{V}$ *par rapport à* **O** *, la position de* **O'** *dans le repère* $\mathcal{B}$ *sera :*
$$\begin{bmatrix} ct \\ V_x \cdot t \\ V_y \cdot t \\ V_z \cdot t \end{bmatrix}_{\mathcal{B}},$$

la position de **O'** *dans son propre repère* $\mathcal{B}'$ *sera :*
$$\begin{bmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

On a donc

$$\begin{bmatrix} ct \\ V_x \cdot t \\ V_y \cdot t \\ V_z \cdot t \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

.D'où : $ct = m_{1,1}ct'$, $V_x \cdot t = m_{2,1}ct'$, $V_y \cdot t = m_{3,1}ct'$, $V_z \cdot t = m_{4,1}ct'$.

On en déduit :

$$t = m_{1,1} \cdot t', \text{ d'où } \quad m_{2,1} = \frac{V_x \cdot t}{ct'} = m_{1,1}\frac{V_x}{c}, \; m_{3,1} = m_{1,1}\frac{V_y}{c}, \; m_{4,1} = m_{1,1}\frac{V_z}{c}.$$

(**2**) *Tout d'abord , en rapellant que* $\overrightarrow{V}$ *est la vitesse de* **O'** *par rapport à* **O** *et mesurée par* **O ,**
de même $\overrightarrow{V'}$ *est la vitesse de* **O** *par rapport à* **O',** *et mesurée par* **O' :** *est − ce que* $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{V'}$?
$\overrightarrow{V}$ *et* $\overrightarrow{V'}$ *sont portés par* $\overrightarrow{OO'}$ *et comme les* **2** *observateurs se croisent , ils ne peuvent rester à distance constante. soit ils se rapprochent , soit ils s'éloignent ont avec des vitesses relatives opposées* .

Par hypothèse les **2** *observateurs sont mutuellement en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre mais comment savoir si le module de leur vitesse respective mesurée par l'autre est le même .*
On se place d'abord du point de vue de l'observateur **O** .
Considérons le cas où **O'** *s'éloigne de* **O** *après le croisement, les* **2** *allant dans la même direction .*

Plaçons nous du point de vue de l'observateur **O**.
Un rayon lumineux part de **O** *vers* **O'** *au temps* t_0, *atteint* **O'** *au temps* t_1 *au point* P_1,
et revient immédiatement vers **O**, *qui est atteint au temps* t_2, *puis repart immédiatement vers* **O'** *qui est atteint au temps* t_3 *au point* P_2,
puis retourne immédiatement vers **O** *qui est atteint au temps* t_4.
Il y a donc un double aller – retour.
La vitesse numérique **c** *du rayon lumineux étant la même dans les* **2** *sens on a :*

$t_1 = \frac{t_0 + t_2}{2}$ *et* $t_3 = \frac{t_2 + t_4}{2}$ *.Par la suite Lorsque le rayon lumineux atteint , au temps* t_1, *le point* P_1,
O' *continue à s'éloigner de* **O** *alors que le rayon retourne vers* **O**.

$t_3 - t_1 = \frac{t_4 - t_0}{2}$ *est la durée entre les* **2** *contacts du rayon lumineux et* **O'**.

Si on suppose que **O'** *a une vitesse uniforme* $\vec{V}$ *de module* **V** *par rapport à* **O**.

On a $\left\| \overrightarrow{P_1P_2} \right\| = V \cdot \frac{t_4 - t_0}{2}$.

On peut remarquer que $\left\| \overrightarrow{P_1P_2} \right\|$ *est aussi égal à la la différence*

$$\left\| \overrightarrow{OP_2} \right\| - \left\| \overrightarrow{OP_1} \right\| = c\left(\frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2} \right).$$

Donc $V = c\left(\frac{\frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2}}{\frac{t_4 - t_0}{2}} \right) = c\left(\frac{t_4 - 2\,t_2 + t_0}{t_4 - t_0} \right)$.

On remarque que les temps t_0 , t_2 *et* t_4 *sont mesurés en* **O**.
L'observateur **O'** *observe ce double aller – retour et mesure le temps avec son horloge .*
Pur lui **O** *s'éloigne avec une vitesse de module* **V'** • *En faisant le même raisonnement on arrive à :*

$$V' = c\left(\frac{t'_4 - 2\,t'_2 + t'_0}{t'_4 - t'_0} \right) = \frac{\gamma}{\gamma}.c\left(\frac{t'_4 - 2\,t'_2 + t'_0}{t'_4 - t'_0} \right) = c\left(\frac{t_4 - 2\,t_2 + t_0}{t_4 - t_0} \right) = V.$$

on posera $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$, $\gamma = m_{1,\,1}$.

Il nous reste à déterminer γ *en remarquant déjà que* $\gamma > 0$ *: si un événement à lieu aprés que* **O** *et* **O'** *se soient croisé* $(t = t' = 0)$ *pour* **O** *il en est de même pour* **O'**.

(3) *Nous allons montrer maintenant que si* $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *alors* ${}^tMGM = G$.

Pour cela considérons un photon émis lors du croisement de **O** *et* **O'** *et considérons sa position* $\vec{P} = t.\vec{c}$ *pour l'observateur* **O** *et* $\vec{P'} = t.\vec{c'}$ *pour l'observateur* **O'**.

On peut représenter $\vec{P}$ *au temps* t *et* $\vec{P'}$ *au temps* t' *par les vecteurs :*

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x = X^1 \\ y = X^2 \\ z = X^3 \end{bmatrix} \text{ et } X' = \begin{bmatrix} ct' \\ X'^1 \\ X'^2 \\ X'^3 \end{bmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}^4$$

Et comme $X = MX'$

on aura simultanément ${}^tXGX = {}^tX'\,{}^tMGMX' = 0$ *et* ${}^tX'GX' = 0$ *puisque par exemple*
$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ *par définition de* c *puisque* $c^2 = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2}$ x, y, z *étant les coordonnées spatiales du photon au temps* $t \neq 0$ *. De même pour* O'

$$c^2 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2} .$$

Donc sur la trajectoire du photon on aura : $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ *et*
$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$ *avec* $X = MX'$.

Si on considère la forme quadratique $\Phi(X) = {}^tXGX$, *tout vecteur* $X \in \mathcal{C}(\Phi)$,
avec $\mathcal{C}(\Phi)$ *le cône d'isotropie de* Φ, *peut être considéré comme vecteur représentant*
la trajectoire d'un photon : si $X = \begin{bmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix}$, *considérer* $X = \begin{bmatrix} ct = X^0 \\ x = X^1 \\ y = X^2 \\ z = X^3 \end{bmatrix}$.

De même pour la forme quadratiue $\Phi'(X) = {}^tX'GX'$.
D'aprés ce qui précéde $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}'(\Phi')$.
On rappelle que $Rad\ \phi = \{x / \forall y\ \phi(x, y) = 0\}$ *avec* ϕ *la forme bilinéaire associée à* Φ.
On vérifie facilement ici pour ce qui nous concerne que $Rad\ \phi = \{0\}$.
or :

Théorème *: (R.Goblot ."Algébre linéaire "Masson 1995 p.254)*
Soit $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$, E *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, *une forme bilinéaire symétrique telle que* $Rad\ \phi \neq \mathcal{C}(\phi)$
.
Pour qu'une forme bilinéaire ϕ' *soit proportionnelle à* ϕ, *il faut et et il suffit que* $\mathcal{C}(\phi) = \mathcal{C}(\phi')$.

On en conclut que : $\exists\, \lambda \neq 0,\ \forall X\ \Phi(MX) = \lambda \cdot \Phi(X)$ *et donc*
$\forall X\ \ {}^t(MX)G(MX) = {}^tX\,{}^tMGMX = \lambda \cdot {}^tXGX \Leftrightarrow {}^tMGM = \lambda \cdot G$ *car*

Théorème *:*
Si A *est une matrice symétrique et si* $\forall X\ {}^tXAX = 0$ *alors* $A = 0$.
Remarque : *symétrique est une hypothèse nécessaire.*
Considérer $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$: $AX = \begin{bmatrix} X^1 \\ -X^0 \end{bmatrix}$ *et* ${}^tXAX = 0$ *et d'une manière générale :*
si A *est une matrice et si* $\forall X\ {}^tXAX = 0$ *alors* A *est antisymétrique.*

On peut maintenant évaluer $\boldsymbol{\lambda}$:
(*N.M.J. Woodhouse. " Special Relativity " • Springer 2002 p.80*)
Les lois de la physique étant les mêmes pour les espaces associés à **O** *et* **O'** (**H1**) *la dilatation des durée sera la même que ce soit l'observateur* **O** *observant* **O'** *ou bien que ce soit l'observateur* **O'** *observant* **O** *puisque les situations physiques sont les mêmes, car les modules des vitesses relatives étant identiques.*
Les coordonnées spatio - temporelle de **O'** *sont représentée par le vecteur* $X = {}^t(ct, x, y, z)$ *pour l' observateur* **O**, *et par* $X' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$ *pour l'observateur* **O'**.
Comme $X = MX'$ *on en déduit que le temps* **t** *mesuré par un observateur situé en* **O** *d'une horloge située en* **O'** *et qui indique le temps* **t'** *à un observateur situé en* **O'** *vérifie* $t = m_{1,1}t'$
avec $m_{1,1} > 0$ *si on suppose qu'il n'y a pas de retournement du temps car :*

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \beta_x ct \\ \beta_y ct \\ \beta_z ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1}ct' \\ m_{2,1}ct' \\ m_{3,1}ct' \\ m_{4,1}ct' \end{bmatrix}.$$

Considérons la situation symétrique où un observateur situé en **O'** *observe une horloge située en* **O** *qui indique un temps* **t** *pour l'observateur situé en* **O** • *L'observateur situé en* **O'** *mesure alors un temps* **t'**.
De ${}^tMGM = \lambda \cdot G$, $\lambda \neq 0$, $\det^2(M) \neq 0$ *et* M^{-1} *existe.*
Comme $X' = M^{-1}X$ *et si on pose* $N = M^{-1}$ *on aura* $t' = n_{1,1}t$
et $n_{1,1} > 0$ *comme précédemment.*
Comme nous sommes dans la même situation physique que précédemment $n_{1,1} = m_{1,1}$.
De ${}^tMGM = \lambda \cdot G$, $\lambda \neq 0$, *on en déduit que* ${}^tM = \lambda \cdot G \cdot M^{-1}G^{-1}$.
D'où $M^{-1} = \lambda^{-1}(G.{}^tM \cdot G) \Rightarrow m_{1,1} = n_{1,1} = (M^{-1})_{1,1} = \lambda^{-1}(G.{}^tM \cdot G)_{1,1}$.
Or $(G \cdot {}^tM \cdot G)_{1,1} = m_{1,1}$ *donc* $\lambda = 1$.

Le raisonnement fait sur **M** *peut être fait sur* $N = M^{-1}$ *d'où* ${}^tM^{-1}GM^{-1} = G$.
On peut aussi remarquer que :

$$G = {}^tMGM \Leftrightarrow ({}^tM)^{-1}G(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}({}^tMGM)(M^{-1}) \Leftrightarrow {}^t(M^{-1})G(M^{-1}) = G.$$

Ces matrices **M** *qui vérifient* ${}^tMGM = G$ *sont appelées matrices de Lorentz et forment un sous − groupe* **L** *du groupe* $GL_4(\mathbb{R})$ *car :*
Id *est de Lorentz donc* **L** *est une partie non vide de* $GL_4(\mathbb{R})$,
De plus si **M** *et* **M'** *sont de Lorentz* MM'^{-1} *l'est aussi :*

$${}^t(MM'^{-1})\ G(MM'^{-1}) = {}^tM'^{-1}({}^tMGM)M'^{-1} = {}^tM'^{-1}(G)M'^{-1} = G.$$

De plus si **M** *est de Lorentz* ${}^tM$ *l'est aussi :*
de ${}^tMGM = G$ *on a* ${}^tM = G \cdot M^{-1} \cdot G$ *puisque* $G = G^{-1}$ *est un élément de* **L**.

(4) On peut maintenant finir d'évaluer la première colonne M_1 **de M** en évaluant γ:

De ${}^tMGM = G$ on en déduit que :

$$ {}^tM_1GM_1 = 1 = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma\beta_x \\ \gamma\beta_y \\ \gamma\beta_z \end{bmatrix} = \gamma^2 - \gamma^2\beta^2_x - \gamma^2\beta^2_y - \gamma^2\beta^2_z \ , $$

d'où $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\beta^2_x + \beta^2_y + \beta^2_z\right)}}$ car $\gamma > 0$ • On en déduit que $\gamma \geq 1$.

(5) Pour expliciter complétement **M** dans le cas qui nous intéresse on va utiliser les **2** théorèmes suivants :

Théorème (J-M. Souriau."Calcul Linéaire" • PUF 1964 • p.378)

Toute matrice **M** de Lorentz peut se mettre sous la forme :

$$ M = exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R},\ \varepsilon = \pm 1 , $$

$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & O \end{bmatrix}$, avec $X \in \mathbb{R}^3$ tel que : ${}^tXX = 1$, ${}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$.

De plus $exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & \left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X{}^tX\right) \end{bmatrix}$

Théorème

(R. Mneimé , F. Testard ."Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques ".
Hermann Paris 1986 •)

Soit **M** une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice **S'** symétrique définie positive et **O** orthogonale telles que $M = OS'$.

Conséquences :

On en déduit en posant $S = OS'{}^tO \Leftrightarrow S' = {}^tOSO$ que **M** peut se décomposer de manière unique en $M = OS' = O({}^tOSO) = SO$ **.**

Cela entraine que décomposition de Souriau est unique :

il suffit de vérifier que $exp(\alpha N)$ est définie positive .

αN est symétrique réelle , il existe donc une matrice **U** orthogonale réelle et une matrice diagonale réelle $D = (d_{i,i})$ telle que $\alpha N = {}^tUDU$ **.**

Comme $exp(\alpha N) = {}^tU exp(D) U$ et $exp(D) = \left(exp(d_{i,i})\right)$ les valeurs propres de $exp(\alpha N)$ sont strictement positive et $exp(\alpha N)$ est définie positive .

De la formule $det(e^A) = e^{Tr(A)}$ on en déduit que $det(exp(\alpha N)) = 1$

et que $det(M) = \varepsilon \cdot det(\Omega) = \pm 1$ **.**

Chapitre II : ***Première méthode pour l'explicitation d'une matrice de Lorentz :***

(A) Partie symétrique :

$$\exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & \left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X\,{}^tX\right) \end{bmatrix} \text{ en fonction de } \vec{\beta}.$$

On considère toujours un point O' *qui s'éloigne d'un point* O *à la vitesse constante* $\vec{V}$.

On pose $\vec{\beta} = \dfrac{\vec{V}}{c}$ *où* c *est la vitesse de la lumière .*

On considère les **2** *bases* $\mathcal{B} = \mathcal{B}\left(\vec{O}_{\mathcal{E}}, c\tau, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *et* $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'\left(\vec{O'}_{\mathcal{E}'}, c\tau', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$ *définies plus haut .*

X *étant les coordonnées d'un point* $P \in E$ *dans la base associée à* $\mathcal{B}$,
X' *étant les coordonnées de ce même point* P *dans la base associée à* $\mathcal{B}'$,
M *la matrice définie par* $X = M \cdot X'$, *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$,
M *est donc une matrice de Lorentz et s'écrit donc sous la forme*

$$M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R},\ \varepsilon = \pm 1,\ N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & O \end{bmatrix},$$

avec $X \in \mathbb{R}^3$ *tel que :* ${}^tXX = 1$, ${}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$. *(voir précédemment).*

On va exprimer dans un premier temps exprimer $\exp(\alpha N)$ *en fonction de* $\vec{\beta}$.

Théorème :

En reprenant les notations précédentes on a , si $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}}$ *on a*

$$\exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right] \\ \left[\gamma\vec{\beta}\right] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{\left[\gamma\vec{\beta}\right]{}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \text{ avec } \left[\gamma\vec{\beta}\right] \text{ les coordonnées de } \gamma\vec{\beta} \text{ dans } \mathcal{B}.$$

Démonstration : *On peut donc écrire que les coordonnées de* O' *dans la base associée à* $\mathcal{B}_O$ *sont :*

$${}^tW = {}^t\left(ct, tV_1, tV_2, tV_3\right) = ct\,{}^t\left(1, \beta_1, \beta_2, \beta_3\right) \text{ avec } \vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$$

et dans $\mathcal{B}'_O$: ${}^tW' = {}^t(ct', 0, 0, 0) = ct'\,{}^t(1, 0, 0, 0)$ *avec* $W = M \cdot W'$.

On remarque d'abord que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = W'$ *donc* $W = \exp(\alpha N)\,W'$.

On est ramené à :

$$\begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & \left(Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha) - 1)X\,{}^tX\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t' = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} t \quad ,$$

cela entraine que $t \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = t' \begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha)X_1 \\ sh(\alpha)X_2 \\ sh(\alpha)X_3 \end{bmatrix}$ *et donc* $t = ch(\alpha)t'$ *d'où :*

$$ch(\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha)X_1 \\ sh(\alpha)X_2 \\ sh(\alpha)X_3 \end{bmatrix} \text{ pour } t' \neq 0 \Rightarrow ch(\alpha)\vec{\beta} = sh(\alpha)\vec{X} \ ,$$

donc $\vec{\beta} = th(\alpha)\vec{X} \Rightarrow \vec{\beta}^2 = th^2(\alpha)$ *puisque* $\vec{X}^2 = 1$.

Remarque :

Comme $|th(\alpha)| < 1 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, *nécessairement* $\|\vec{\beta}\| = \left\|\frac{\vec{V}}{c}\right\| < 1 \Leftrightarrow \|\vec{V}\| < c$

ce qui exclut toute vitesse supraluminique entre observateurs .

On pose $\beta = \sqrt{\vec{\beta}^2}$ *et* $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}}$.

Comme $1 - th^2(\alpha) = \dfrac{1}{ch^2(\alpha)} \Rightarrow ch^2(\alpha) = \dfrac{1}{1 - th^2(\alpha)} = \dfrac{1}{1 - \vec{\beta}^2} = \gamma^2$,

comme $ch(\alpha) \geq 1 \quad \gamma = ch(\alpha)$; *comme* $sh^2(\alpha) = ch^2(\alpha) - 1 = \gamma^2 - 1$

$$= \frac{1}{1 - \vec{\beta}^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \gamma^2\beta^2 .$$

En résumé on a $\gamma = ch(\alpha)$, $\gamma^2\beta^2 = sh^2(\alpha)$, $\beta^2 = th^2(\alpha)$.

D'autre part :

$$\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma + 1)(\gamma - 1) \Rightarrow \frac{\gamma^2\beta^2}{(1 + \gamma)} = (\gamma - 1) = ch(\alpha) - 1$$

et $X_iX_j = \dfrac{(\beta_i\beta_j)}{th^2(\alpha)} = \dfrac{(\beta_i\beta_j)}{\beta^2}$ *donc*

$$(ch(\alpha)-1)X_iX_j=\frac{\gamma^2\beta^2}{(1+\gamma)}\frac{(\beta_i\beta_j)}{\beta^2}=\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_i\beta_j$$ *, ce qui permet d'écrire que :*

$$Id_{\mathbb{R}^3}+(ch(\alpha)-1)X^tX$$
$$=\begin{bmatrix} 1+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta^2_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta^2_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta^2_3 \end{bmatrix}$$
$$=Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)}.$$

Comme $sh(\alpha)X_i=\frac{sh(\alpha)\beta_i}{th(\alpha)}=ch(\alpha)\beta_i=\gamma\beta_i$ *d'où le résultat .*

En résumé :

$$M=\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}]\Omega \\ [\gamma\vec{\beta}] & \left(Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)}\right)\Omega \end{bmatrix}$$

avec ${}^t\Omega\Omega=Id_{\mathbb{R}^3}$.

Par la suite si on note $C=Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)}\Rightarrow M=\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}]\Omega \\ [\gamma\vec{\beta}] & C\Omega \end{bmatrix}$.

Remarques :

$$(1)\ C[\vec{\beta}]=\left(Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)}\right)\vec{\beta}=\vec{\beta}+\gamma^2\frac{[\vec{\beta}]\,{}^t[\vec{\beta}[\vec{\beta}]]}{(1+\gamma)}=[\vec{\beta}]\left(1+\frac{\gamma^2\beta^2}{(1+\gamma)}\right)$$
$$=[\vec{\beta}]\left(1+\frac{\gamma^2-1}{(1+\gamma)}\right)=\gamma[\vec{\beta}].$$

(2) *Si* $M=M'.M''$ *est le produit de* **2** *matrices de Lorentz sans rotation* $(\Omega'=\Omega''=Id)$ *avec :*

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t(\gamma\vec{\beta})\Omega \\ \gamma\vec{\beta} & C\Omega \end{bmatrix}, M' = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t(\overrightarrow{\gamma'\beta'}) \\ \overrightarrow{\gamma'\beta'} & C' \end{bmatrix}, M'' = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t(\overrightarrow{\gamma''\beta''}) \\ \overrightarrow{\gamma''\beta''} & C'' \end{bmatrix}$$

alors $$M = \begin{bmatrix} \gamma'\gamma''(\overleftrightarrow{\beta}'\vec{\beta}'' + 1) & \gamma'\gamma''\overleftrightarrow{{}^t\beta''} + \gamma'\overleftrightarrow{{}^t\beta'}C'' \\ \gamma'\gamma''\overrightarrow{\beta'} + \gamma''C'\overrightarrow{\beta''} & \gamma'\gamma''\vec{\beta}'\overleftrightarrow{\beta}'' + C'C'' \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma = \gamma'\gamma''(\overleftrightarrow{\beta}'\vec{\beta}'' + 1),$$

$$\vec{\beta} = \frac{\gamma'\overrightarrow{\beta'} + C'\overrightarrow{\beta''}}{\gamma'(\overleftrightarrow{\beta}'\vec{\beta}'' + 1)}, \; C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2\vec{\beta}\overleftrightarrow{\beta}}{(1+\gamma)} \; et \; \Omega = C^{-1}(\gamma'\gamma''\vec{\beta}'\overleftrightarrow{\beta}'' + C'C'').$$

En notant que $(\vec{\beta}\overleftrightarrow{\beta})(\vec{\beta}\overleftrightarrow{\beta}) = \vec{\beta}(\overleftrightarrow{\beta}\vec{\beta})\overleftrightarrow{\beta} = \vec{\beta}^2(\vec{\beta}\overleftrightarrow{\beta})$ *et que* $\gamma^2\vec{\beta}^2 = \gamma^2 - 1$:

$$\left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)}\right)\cdot\left(Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma\frac{\vec{\beta}\overleftrightarrow{\beta}}{(1+\gamma)}\right)$$

$$= Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma\frac{\vec{\beta}\overleftrightarrow{\beta}}{(1+\gamma)} + \gamma^2\frac{\vec{\beta}\overleftrightarrow{\beta}}{(1+\gamma)} - \gamma^3\frac{\vec{\beta}^2(\vec{\beta}\overleftrightarrow{\beta})}{(1+\gamma)^2}$$

$$= Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\vec{\beta}\overleftrightarrow{\beta}}{(1+\gamma)^2}\left(-\gamma(1+\gamma) + \gamma^2(1+\gamma) - \gamma(\gamma^2 - 1)\right) = Id_{\mathbb{R}^3}.$$

Donc $C^{-1} = \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)}\right)^{-1} = Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma\frac{\vec{\beta}\overleftrightarrow{\beta}}{(1+\gamma)}$ *, ce qui permet d'écrire* Ω *en fonction de* $\vec{\beta}'$, $\vec{\beta}''$:

$$\Omega = \left(Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma\frac{\vec{\beta}\overleftrightarrow{\beta}}{(1+\gamma)}\right)(\gamma'\gamma''\vec{\beta}'\overleftrightarrow{\beta}'' + C'C'') \; avec :$$

$$\vec{\beta} = \frac{\gamma'\overrightarrow{\beta'} + C'\overrightarrow{\beta''}}{\gamma'(\overleftrightarrow{\beta}'\vec{\beta}'' + 1)}, \; C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2\overrightarrow{\beta'}\,\overleftrightarrow{{}^t\beta'}}{(1+\gamma')} \; et \; C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2\overrightarrow{\beta''}\,\overleftrightarrow{{}^t\beta''}}{(1+\gamma'')}, \; \gamma = \gamma'\gamma''(\overleftrightarrow{\beta}'\vec{\beta}'' + 1).$$

(**3**) *La connaissance de* $C^{-1} = Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma\frac{\vec{\beta}\overleftrightarrow{\beta}}{(1+\gamma)}$ *permet d'évaluer* Ω *en fonction de* M :

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix}$$ • *Considérons le bloc* $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{3,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix}$

qui représente les composantes spatiales des vecteurs spatiaux de la base associée à $\boldsymbol{O'}$ *exprimées dans la base associée à* $\boldsymbol{O}$.

On aura $\Omega = \boldsymbol{C}^{-1}\mathcal{M}$ **.**

(4) *Si* $\vec{\boldsymbol{\beta}} \,/\!/\, \vec{\boldsymbol{i}}$ *alors les termes non diagonaux de* $\boldsymbol{C}$ *sont nuls ,*

et un seul terme diagonal de $\boldsymbol{C}$ *est différent de* $\boldsymbol{1}$: $\boldsymbol{1} + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\boldsymbol{\beta}_1^2 = \dfrac{(1+\gamma) + \gamma^2\vec{\boldsymbol{\beta}}^2}{(1+\gamma)}$

$$= \frac{1 + \gamma + \gamma^2 - 1}{(1+\gamma)} = \gamma \text{ car } \gamma^2 - 1 = \frac{1}{1 - \vec{\boldsymbol{\beta}}^2} - 1 = \frac{\vec{\boldsymbol{\beta}}^2}{1 - \vec{\boldsymbol{\beta}}^2} = \gamma^2\vec{\boldsymbol{\beta}}^2.$$

(5) *Comme* $\gamma^2\boldsymbol{\beta}^2 = \gamma^2 - 1$ *on peut remplacer , en notant* $\boldsymbol{\delta}^i_j$ *le symbole de Kronecker ,*

$\boldsymbol{\delta}^i_j + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\beta}_j$ *par* $\boldsymbol{\delta}^i_j + (\gamma - 1)\dfrac{\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\beta}_j}{\boldsymbol{\beta}^2}$ *dans l'évaluation de* $\boldsymbol{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\boldsymbol{ch}(\boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{1})X{}^tX$

car $\gamma^2\boldsymbol{\beta}^2 = \gamma^2 - 1 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)} = \dfrac{(\gamma - 1)}{\boldsymbol{\beta}^2}$.

(6) $\gamma\cdot(1 + \boldsymbol{\beta}) = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$ *car :*

$$1 - \boldsymbol{\beta}^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \Leftrightarrow \gamma\cdot\boldsymbol{\beta} = \sqrt{\gamma^2 - 1}.$$

Donc $\dfrac{1+\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}^2}} = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1+\boldsymbol{\beta}}{1-\boldsymbol{\beta}}} = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\boldsymbol{\beta}}{1-\boldsymbol{\beta}}\right) = \ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}\right);$$

et on retrouve que $\boldsymbol{argth}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{argcosh}(\gamma) = \boldsymbol{\alpha}$ *car* $\gamma = \boldsymbol{ch}(\boldsymbol{\alpha})$ *et* $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{th}(\boldsymbol{\alpha})$.

(7) *Sachant que* $[\boldsymbol{exp}(\boldsymbol{\alpha}N)]^{-1} = \boldsymbol{exp}((-\boldsymbol{\alpha})N)$, $\gamma = \boldsymbol{ch}(\boldsymbol{\alpha})$ *et* $\vec{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{th}(\boldsymbol{\alpha})\vec{X}$ *il vient :*

$$\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}] \\ [\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}]\,{}^t[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & -{}^t[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}] \\ -[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}]\,{}^t[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}.$$

$(\boldsymbol{B})$ *Maintenant évaluons* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *et* $\boldsymbol{\Omega}$

Evaluation de $\boldsymbol{\varepsilon = \pm 1}$ **:**

Comme

$$W = MW' = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = \begin{bmatrix} \gamma\varepsilon & {}^t[\gamma\vec{\beta}]\Omega \\ \varepsilon[\gamma\vec{\beta}] & C\Omega \end{bmatrix} W'$$

avec ${}^tW = {}^t(ct, tV_1, tV_2, tV_3)$, ${}^tW' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$ *.On en déduit que* $\boldsymbol{t = \varepsilon \cdot \gamma \cdot t'}$.

Donc si $\boldsymbol{\varepsilon = -1}$ *, il y aurait un renversement du temps difficile à justifier physiquement.*

Par la suite on suppose que $\boldsymbol{\varepsilon = +1}$ *.*

Etude de $\boldsymbol{\Omega}$ **:**

On va montrer que $\boldsymbol{\Omega}$ *est indépendant de* $\vec{\boldsymbol{\beta}}$ *et est simplement la matrice de changement de base* $\mathcal{P}\left((\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}), (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')\right)$ *lorsque* $\vec{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{0}$ *.*

Considérons nos **2** *observateurs* **O** *et* **O'** *munis respectivement des bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$*,* *munissons* **O** *d'une autre base* $\mathcal{B}_1$ *et* **O'** *d'une autre base* $\mathcal{B}'_1$ *.*

Les matrices de passage de $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}_1$ *et de* $\mathcal{B}'$ *à* $\mathcal{B}'_1$ *seront des matrices orthogonales*

de la forme : $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$ *et* $H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega' \end{bmatrix}$ *avec* ${}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$ *et* ${}^t\Omega'\Omega' = Id_{\mathbb{R}^3}$ *.*

On peut écrire que la matrice de passage

$$\mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)\mathcal{P}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)\, \mathcal{P}(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}') .$$

Si $M = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ *et* $M_1 = \mathcal{P}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)$ *on a* $M = HM_1{}^tH'$ *.*

En particulier si **O** *et* **O'** *conviennent de choisir des bases* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}'_1$ *telles que dans* $\boldsymbol{M_1}$ *les troisième et quatrième colonnes sont telles que les troisième et quatrième vecteurs des bases* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}'_1$ *sont identiques , que la deuxième colonne est telle que les deuxièmes vecteurs des bases* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}'_1$ *ont des composantes spatiales parallèles et que* $\det(M_1) > 0$ *.*

$\vec{i}$ *,* $\vec{i}'$*,* $\vec{V}$ *et* $\overrightarrow{OO'}$ *sont de même sens et en ayant posé :*

$\boldsymbol{\beta} = \|\vec{\boldsymbol{\beta}}\| = \boldsymbol{\beta_x}$*. En se rapellant que* $\boldsymbol{M_1}$ *est la matrice de changement de base de* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}'_1$ *,* *dans la nouvelle base on conserve les* **3** *− ème et* **4** *− ème vecteur de l'ancienne base ,*

$$(M_1)_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } (M_1)_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Nous avons vu que l'expression de la première colonne est commune à toutes

les matrices de Lorentz $(M_1)_1 = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Comme ${}^tM_1$ *est de Lorentz :*

$$((M_1)_{1,1})^2 - ((M_1)_{1,2})^2 - ((M_1)_{1,3})^2 - ((M_1)_{1,4})^2 = 1$$

c'est à dire $\gamma^2 - ((M_1)_{1,2})^2 = 1$ *d'où*

$$((M_1)_{1,2})^2 = \gamma^2 - 1 = \frac{1}{1-\beta^2} - 1 = \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \beta^2\gamma^2.$$

De même **:** $((M_1)_{2,1})^2 - ((M_1)_{2,2})^2 - ((M_1)_{2,3})^2 - ((M_1)_{2,4})^2 = -1$

c'est à dire $\beta^2\gamma^2 - ((M_1)_{2,2})^2 = -1$ *d'où* $\beta^2\gamma^2 + 1 = ((M_1)_{2,2})^2$

$$= \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} = \gamma^2.$$

Comme $\beta^2\gamma^2 - \gamma^2 = \gamma^2(\beta^2 - 1) = -1$ *les* **2** *autres éléments de la colonne sont nuls .*

On a les possibiltés suivantes : $(M_1)_{1,2} = \pm\gamma\beta$ *et* $(M_1)_{2,2} = \pm\gamma$**:**

$\det\left(\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix}\right) = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$, $\det\left(\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & -\gamma \end{bmatrix}\right) = -\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = -\gamma^2(1+\beta^2)$,

$\det\left(\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix}\right) = \gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(\beta^2+1)$,

$\det\left(\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ \gamma\beta & -\gamma \end{bmatrix}\right) = -\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(\beta^2 - 1) = -1.$

D'où $(M_1)_{1,2} = \gamma\beta$ *et* $(M_1)_{2,2} = \gamma$ *puisque* $\det(M_1) > 0$.

Donc M_1 *est bien une matrice qui répond à la question .*

On pourra donc écrire que toute matrice de Lorentz M *peut s'écrire sous la forme :*

$M = HM_1{}^tH'$ *avec :* $M_1 = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ et } H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega' \end{bmatrix}, \ {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3} \text{ et } {}^t\Omega'\Omega' = Id_{\mathbb{R}^3}.$$

On en déduit que $M = HM_1({}^tHH){}^tH' = HM_1{}^tH(H\,{}^tH')$

$(H\,{}^tH')$ *est orthogonal ,* $HM_1{}^tH$ *est symétrique défini positif car*

$det\left(HM_1{}^tH - \lambda Id\right) = det\left(HM_1{}^tH - \lambda\, H{}^tH\right) = det(H)\,det\left(M_1 - \lambda Id\right)det({}^tH)$,

donc les valeurs propres de M_1 *et* $HM_1{}^tH$ *sont les mêmes or*

on connait les valeurs propres de M_1 *car :*

$${}^t\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \gamma(1+\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(1-\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et $0 \le \beta < 1$ **et** $\gamma \ge 1$ **.**

On a aussi $M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$ *, par unicité de la décomposition*

alors on a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} = HH'$ *qui est indépendant de* $\vec{\beta}$ *.*

Comme pour $\vec{\beta} = \vec{0}$ M *est de la forme* $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ *avec*

$N = \mathcal{P}\left((\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}), (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')\right)$.

Donc $\Omega = \mathcal{P}\left((\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}), (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')\right)$ *lorsque* $\vec{\beta} = \vec{0}$.

De plus par identification des parties symétriques on obtient les valeurs propres de

$\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$ *qui sont* $(\gamma(1-\beta), \gamma(1+\beta), 1, 1)$.

Chapitre III :

Deuxième méthode pour l'explicitation d'une matrice de Lorentz sous la forme :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}.$$

Reprenons une autre démonstration décrite dans J • Parizet :
"La géométrie de la relativité restreinte (Ellipses) p.89".

Théorème : Si $G = {}^tMGM$ *et si* M *est écrit sous la forme* $M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^tU \\ V & A \end{bmatrix}$

alors $M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^tV \\ V & Id + \dfrac{V\,{}^tV}{1+\gamma} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$ *, où* Ω *est une matrice orthogonale.*

Si $G = {}^tMGM$ *alors* $GM^{-1} = {}^tMG$ ***et*** *donc* $M^{-1} = G\,{}^tMG$.

Si on écrit M *sous la forme* $M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^tU \\ V & A \end{bmatrix}$ *où* $\gamma \in \mathbb{R}$, U *et* V *2 vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *et*

A *une matrice* 3×3 *.*

D'aprés ce qui précéde : $M^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & -{}^tV \\ -U & {}^tA \end{bmatrix}$ *et donc :*

$$M \bullet M^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma^2 - {}^tV \bullet V & \gamma \bullet {}^tU - {}^tV \bullet A \\ -\gamma U + {}^tA.V & {}^tA \bullet A - U \bullet {}^tU \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Id_3 \end{bmatrix}$$ *d'où les égalités :*

$$\gamma^2 - {}^tV \bullet V = 1\,,\ -\gamma U + {}^tA.V = \gamma \bullet {}^tU - {}^tV \bullet A = 0,\ {}^tA \bullet A - U \bullet {}^tU = Id_3.$$

On remarque que $\gamma^2 \geq 1$ *puisque* $\gamma^2 - 1 = {}^tV \bullet V \geq 0$ *,* ${}^tA.V = \gamma U$ *et* ${}^tV \bullet A = \gamma \bullet {}^tU$ *.*

On a $V = 0 \Leftrightarrow \gamma^2 = 1$ *,* $V = 0 \Leftrightarrow U = 0$*,* $V = 0 \Leftrightarrow {}^tA \bullet A = Id_3$.

Donc si $V = 0$ $M = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ *avec* ${}^tA \bullet A = Id_3$ *.*

Considérons le cas $V \neq 0$ *et donc* $\gamma^2 > 1.$

On peut alors considérer $\Omega = A - \dfrac{V \bullet {}^tU}{1+\gamma}$ *.*

Calculons ${}^t\Omega\ \Omega = \left({}^tA - \dfrac{U.{}^tV}{1+\gamma}\right)\left(A - \dfrac{V \bullet {}^tU}{1+\gamma}\right)$

$$= {}^tA \bullet A - \frac{{}^tAV\,{}^tU}{1+\gamma} - \frac{U\,{}^tVA}{1+\gamma} + \frac{U\,{}^tVV\,{}^tU}{(1+\gamma)^2}\ ,$$

$$= Id_3 + U \cdot {}^tU - \frac{2.\gamma U.{}^tU}{1+\gamma} + \frac{(\gamma^2 - 1)U \cdot {}^tU}{(\gamma^2 - 1)}$$

$$= Id_3 + U \cdot {}^tU \left(1 - \frac{2.\gamma}{1+\gamma} + \frac{(\gamma^2 - 1)}{(1+\gamma)^2} \right)$$

$$= Id_3 + U \cdot {}^tU(1 + \gamma - 2.\gamma + \gamma - 1) = Id_3 .$$

Donc $\boldsymbol{\Omega}$ *est une matrice orthogonale .*

D'autre part calculons

$${}^tV.\ \Omega = {}^tV \cdot \left(A - \frac{V \cdot {}^tU}{1+\gamma} \right) = {}^tV \cdot A - \frac{{}^tV \cdot V \cdot {}^tU}{1+\gamma} = \gamma \cdot {}^tU - \frac{(\gamma^2 - 1) \cdot {}^tU}{1+\gamma} = {}^tU .$$

Donc $\Omega \cdot U = \Omega^t\, \Omega \cdot V = V$ *· D'où comme* $\Omega = A - \dfrac{V \cdot {}^tU}{1+\gamma}$

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^tU \\ V & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^tU \\ V & \Omega + \dfrac{V \cdot {}^tU}{1+\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^tU \cdot {}^tO \\ V & Id + \dfrac{V \cdot {}^tU \cdot {}^t\Omega}{1+\gamma} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ et donc :}$$

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^tV \\ V & Id + \dfrac{V\,{}^tV}{1+\gamma} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} , \ \Omega \text{ orthogonale .}$$

On a vu directement que pour toute matrice de Lorentz $\boldsymbol{M}$ *sa première colonne*

$$M_1 = \begin{bmatrix} \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2)}} \\ V = \gamma\vec{\beta} \end{bmatrix} .$$

Ce qui est la décomposition cherchée :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} , \ \Omega \text{ orthogonale .}$$

Montrons que cette décomposition est unique .

Pour cela on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 1 :

Si $\boldsymbol{\Delta}$ *une matrice orthogonale* ***3 x3***

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \gamma & {}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right] \\ \left[\gamma\vec{\beta}\right] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{\left[\gamma\vec{\beta}\right]{}^t\left[\gamma\vec{\beta}\right]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t\left[\gamma\Delta\vec{\beta}\right] \\ \left[\gamma\Delta\vec{\beta}\right] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{\left[\gamma\Delta\vec{\beta}\right]{}^t\left[\gamma\Delta\vec{\beta}\right]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$$

.

De plus si on pose $\beta = \left\|\vec{\beta}\right\|$ *alors* $\beta = \left\|\vec{\beta}\right\| = \left\|\Delta\vec{\beta}\right\|$.

Démonstration : faire le produit et appliquer $\Delta . {}^t\Delta = Id_{\mathbb{R}^3}$.

Lemme 2 :

Considérons une matrice de Lorentz N *symétrique de la forme :*

$$N = A. \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . {}^TA \quad \text{avec } \beta = \left\|\vec{\beta}\right\|, \text{ alors } N \text{ est de la forme :}$$

$$N = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t\left[\gamma\vec{\beta'}\right] \\ \left[\gamma\vec{\beta'}\right] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{\left[\gamma\vec{\beta'}\right]{}^t\left[\gamma\vec{\beta'}\right]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \text{avec } \beta = \left\|\vec{\beta}\right\| = \left\|\vec{\beta'}\right\| .$$

Démonstration :

On exploite une idée développée dans : Special relativity de Schröder Ulrich E p.92 World Scientific .

On peut consulter le livre à :

https ://archive • org/details/specialrelativit0000schr/page/92/mode/2 up?view=theater .

Considérons une matrice de Lorentz N *symétrique de la forme :*

$$N = A. \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . {}^TA \quad \text{avec } \beta = \left\|\vec{\beta}\right\|, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}, \Omega \text{ une matrice orthogonale } 3\ x3 .$$

N *est bien une matrice de Lorentz comme produit de* 3 *matrices de Lorentz .*

Comme Ω *est une matrice de rotation* $3\ x3$ *on peut la décomposer en un produit de* 3 *rotations élémentaires (angles d' Euler) :*

(voir par exemple : https ://en • wikipedia • org/wiki/Rotation_formalisms_in_three_dimensions) .

Si on définit :

$$Rx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad Ry = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\varphi) & 0 & sin(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -sin(\varphi) & 0 & cos(\varphi) \end{bmatrix}, Rz = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\psi) & -sin(\psi) & 0 \\ 0 & sin(\psi) & cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on peut donc écrire $A = Rz \bullet Ry \bullet Rx$.

Cet ordre de composition est choisi pour simplifier les calculs , ayant remarqué qu'il y a invariance par rotationautour de l'axe des x :

$$Rx.\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^tRx = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ *: **A** ne sera pas forcément unique .*

d'où comme

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi)\cos(\varphi) & -\sin(\psi)\cos(\theta) + \cos(\psi)\sin(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\psi)\sin(\theta) + \cos(\psi)\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 & \sin(\psi)\cos(\varphi) & \cos(\psi)\cos(\theta) + \sin(\psi)\sin(\varphi)\sin(\theta) & -\cos(\psi)\sin(\theta) + \sin(\psi)\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

on a : (la variable θ étant éliminée) :

$$N = \begin{bmatrix} \gamma & \cos(\psi)\cos(\varphi)\,\gamma\beta & \sin(\psi)\cos(\varphi)\,\gamma\beta & -\sin(\varphi)\,\gamma\beta \\ \cos(\psi)\cos(\varphi)\,\gamma\beta & 1+\cos(\psi)^2(-1+\gamma)\cos(\varphi)^2 & \sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\varphi)^2(-1+\gamma) & -\cos(\varphi)\cos(\psi)\sin(\varphi)(-1+\gamma) \\ \sin(\psi)\cos(\varphi)\,\gamma\beta & \sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\varphi)^2(-1+\gamma) & 1+\left((1-\gamma)\cos(\psi)^2-1+\gamma\right)\cos(\varphi)^2 & -\cos(\varphi)\sin(\psi)\sin(\varphi)(-1+\gamma) \\ -\sin(\varphi)\,\gamma\beta & -\cos(\varphi)\cos(\psi)\sin(\varphi)(-1+\gamma) & -\cos(\varphi)\sin(\psi)\sin(\varphi)(-1+\gamma) & (1-\gamma)\cos(\varphi)^2+\gamma \end{bmatrix}.$$

Comme $N = A.\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.^TA$ *d'aprés le **lemme 1 :***

$$\gamma = \gamma' \text{ , } \overrightarrow{\beta'} = A\overrightarrow{\beta} \text{ avec } \overrightarrow{\beta} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \beta = \left\|\overrightarrow{\beta}\right\| = \left\|\overrightarrow{\beta'}\right\| = \beta'.$$

*La première colonne de **N** s'écrit, comme toute première colonne de matrice de Lorentz*

sous la forme : $\begin{bmatrix} \gamma' \\ \gamma'\cdot\beta'_1 \\ \gamma'\cdot\beta'_2 \\ \gamma'\cdot\beta'_3 \end{bmatrix}$.

Par identification sur la première colonne :

$$\cos(\psi)\cos(\varphi) = \frac{\beta'_1}{\beta'} \quad , \quad \sin(\psi)\cos(\varphi) = \frac{\beta'_2}{\beta'} \quad , \quad \sin(\varphi) = -\frac{\beta'_3}{\beta'} \quad .$$

On rapelle que $\gamma^2\cdot\beta^2 = \gamma^2 - 1$ *puisque* $1 = \gamma^2\left(1-\beta^2\right)$ *car* ${}^tNGN = G$.
Calcul des coefficients de $N = \left(n_{i,j}\right)$ *:*

$$n_{2,2} = 1 + \cos(\psi)^2 (-1+\gamma)\cos(\varphi)^2 = 1 + \cos(\psi)^2 \cos(\varphi)^2 \frac{\gamma^2 \cdot \beta^2}{1+\gamma}$$

$$= 1 + \left(\frac{\beta'_1}{\beta}\right)^2 \frac{\gamma^2 \cdot \beta^2}{1+\gamma} \qquad = 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta'^2_1 .$$

$$n_{3,3} = 1 + \left((1-\gamma)\cos(\psi)^2 - 1 + \gamma\right)\cos(\varphi)^2 = 1 + (1-\gamma)\left(\cos(\psi)^2\cos(\varphi)^2 - \cos(\varphi)^2\right)$$

$$= 1 + (1-\gamma)\left(\cos(\psi)^2\cos(\varphi)^2 - 1 + \sin(\varphi)^2\right) = 1 + (1-\gamma)\left(\frac{\beta'^2_1 - \beta^2 + \beta'^2_3}{\beta^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta'^2_2 .$$

$$n_{4,4} = (1-\gamma)\cos(\varphi)^2 + \gamma = 1 + (\gamma - 1)\left(1 - \cos(\varphi)^2\right) = 1 + \frac{\gamma^2 \cdot \beta^2}{1+\gamma}\sin(\varphi)^2 = 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta'^2_3 .$$

$$n_{3,2} = \sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\varphi)^2(-1+\gamma) = \sin(\psi)\cos(\varphi)\cos(\psi)\cos(\varphi)(-1+\gamma)$$

$$= \frac{\gamma^2 \cdot \beta^2}{1+\gamma}\frac{\beta'_2}{\beta}\frac{\beta'_1}{\beta} = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta'_1\beta'_2 .$$

$$n_{4,3} = -\cos(\varphi)\sin(\psi)\sin(\varphi)(-1+\gamma) = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta'_2\beta'_3 .$$

$$n_{4,2} = -\cos(\varphi)\cos(\psi)\sin(\varphi)(-1+\gamma) = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta'_1\beta'_3 .$$

On complète par symétrie et finalement :

$$N = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta'}] \\ [\gamma\vec{\beta'}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{[\gamma\vec{\beta'}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta'}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}.$$

Théorème :

Pour toute matrice $S = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$

il existe $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$, Ω *une matrice orthogonale* 3×3 *telle que* $S = A.\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.{}^{T}A$.

avec $\beta = \left\| \vec{\beta} \right\|$.

Démonstration :

Considérons la matrice $P = B.\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.{}^{T}B$ *avec* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix}$,

Π *une matrice orthogonale* 3×3,

avec $\beta = \left\| \vec{\beta} \right\|$ *et* γ *donnés par* S.

alors ***lemme 2*** : $P = \begin{bmatrix} \gamma & {}^{t}\left[\gamma\vec{\beta'}\right] \\ \left[\gamma\vec{\beta'}\right] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{\left[\gamma\vec{\beta'}\right]{}^{t}\left[\gamma\vec{\beta'}\right]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$ *avec* $\beta = \left\| \vec{\beta} \right\| = \left\| \vec{\beta'} \right\|$.

Comme $\beta = \left\| \vec{\beta} \right\| = \left\| \vec{\beta'} \right\|$ *il existe* Δ *une matrice orthogonale* 3×3 *telle que* $\Delta\vec{\beta} = \vec{\beta'}$.

Donc

$$P = \begin{bmatrix} \gamma & {}^{t}\left[\gamma\Delta\vec{\beta}\right] \\ \left[\gamma\Delta\vec{\beta}\right] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{\left[\gamma\Delta\vec{\beta}\right]{}^{t}\left[\gamma\Delta\vec{\beta}\right]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \gamma & {}^{t}\left[\gamma\vec{\beta}\right] \\ \left[\gamma\vec{\beta}\right] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{\left[\gamma\vec{\beta}\right]{}^{t}\left[\gamma\vec{\beta}\right]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^{t}\Delta \end{bmatrix}$$

d'aprés le ***lemme 1 .***

$$\text{donc } P = B.\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.{}^{T}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \gamma & {}^{t}\left[\gamma\vec{\beta}\right] \\ \left[\gamma\vec{\beta}\right] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{\left[\gamma\vec{\beta}\right]{}^{t}\left[\gamma\vec{\beta}\right]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^{t}\Delta \end{bmatrix}$$

$$d'où : S = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\overrightarrow{\gamma\beta}] \\ [\overrightarrow{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{[\overrightarrow{\gamma\beta}]\,{}^t[\overrightarrow{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t\Delta \end{bmatrix} \bullet B \right) . \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \left({}^T B . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \right) .$$

Il suffit alors de poser $A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t\Delta \end{bmatrix} \bullet B \right)$ *matrice orthogonale pour avoir le résutat .*

On a vu précedemment que :

$${}^t\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \gamma(1+\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(1-\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

De ${}^tASA = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *et comme*

$$det({}^tASA - \lambda Id) = det({}^tASA - \lambda\, {}^tAA) = det({}^tA)\, det(S - \lambda Id)\, det(A) ,$$

les valeurs propres de S *et* ${}^tASA$ *sont les mêmes .*
Donc les valeurs propres de la partie symétrique de la décomposition sont strictement positive pour $\beta > 0$ *.*
Or (*Voir infra*) (*R. Mneimé , F. Testard* ."Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques ". *Hermann Paris 1986* •)
Soit M *une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice* S' *symétrique définie positive et* O *orthogonale telles que* $M = OS'$ *.*
On en déduit en posant $S = OS'\,{}^tO \Leftrightarrow S' = {}^tOSO$ *que* M *peut se décomposer de manière unique en*
$M = OS' = O({}^tOSO) = SO$ *.*
La décomposition est donc unique .

L'indépendance de $\mathbf{\Omega}$ *vis à vis de* $\vec{\boldsymbol{\beta}}$ *s'obtient comme dans la méthode précédente .*

Remarque : il existe d'autres méthodes , par exemple :
E. Gourgoulon : *Relativité restreinte • EDP Sciences p.203 :*
une méthode géométrique basée sur l'existence d'au moins une valeur propre réelle pour toute matrice de Lorentz et pour une approche heuristique :
C • Semay B . Silvestre — Brac *: Relativite Restreinte . Dunod p.120.*

Bibliographie :

Annequin et Boutigny ."Mécanique relativiste ,Exercices ".*Vuibert 1978.*
R.G. Bartle ." Modern theory of integration ".*AMS 2001.*
P • Boyer ."Algèbre et Géométries " . *C&M 2015* .
J. Dieudonné."Eléments d'analyse " .*Gauthier − villars 1969* .
F • R • Gantmacher."Théorie des matrices " *• Edition J • Gabay 1990.*
R.Goblot ."Algébre linéaire "*Masson 1995* .
E.Gourgoulhon ."Relativité restreinte" *• EDP Sciences 2010* .
J. Grifone."Algèbre Linéaire" .*Cépaduès éditions 2002* .
J.R. Lucas , P.E. Hodgson "Spacetime and electromagnetism " .*Clarenton Press 1990* .
R. Mneimé , F. Testard ."Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques ". *Hermann Paris 1986* .
J - M. Monier."Algèbre 1 et 2". *Dunod 1997* .
J.Ph.Pérez ." Relativité et invariance "*Dunod 2011.*
W.Rudin ."Analyse réelle et complexe ".*Masson 1978* .
C.Semay , B.Silvestre − Brac . "Relativité restreinte". *Dunod 2010.*
J - M. Souriau."Calcul Linéaire " *• PUF 1964 •*
Schröder Ulrich ESpecial relativity World Scientific .
On peut consulter le livre à :
https :// archive • org / details / specialrelativit0000schr / page / 92 / mode / 2 up?view=theater .
N.M.J. Woodhouse . " Special Relativity " *• Springer 2002 • On peut le consulter sur*
(*https :// archive • org / details / specialrelativit0000wood / mode / 2 up?view=theater*)